

# MECÂNICA GERAL - 2/2009

## LISTA 9

1. Um raio de luz vai de um ponto  $P_1$  num meio de índice de refração  $n_1$  até um ponto  $P_2$  num meio de índice de refração  $n_2$ , passando pelo ponto  $Q$  (cuja posição exata temos que determinar) na interface plana entre os dois meios. Mostre que o princípio de Fermat implica em que, na trajetória seguida pelo raio de luz,  $Q$  tem que estar num plano perpendicular à interface que contenha os pontos  $P_1$  e  $P_2$  e que esta trajetória obedeça à lei de Snell. (Sugestões: escolha o plano da interface como o plano  $xz$ , e escolha o eixo  $y$  passando pelo ponto  $P_1$  de modo que suas coordenadas sejam  $(0, h_1, 0)$  e que as coordenadas de  $P_2$ , situado no plano  $xy$ , sejam  $(x_2, -h_2, 0)$ . Chame as coordenadas de  $Q$  de  $(x, 0, z)$ . Calcule o tempo que a luz leva para percorrer o trajeto  $P_1QP_2$  e mostre que este tempo é mínimo quando a coordenada  $z$  do ponto  $Q$  é nula, e o trajeto obedece à lei de Snell.)

2. Em muitos problemas de cálculo variacional torna-se necessário exprimir o comprimento  $ds$  de um pequeno segmento de uma curva sobre uma superfície, como feito em aula. Monte, inclusive para seu uso futuro, uma tabela dando as expressões apropriadas para  $ds$  nas seguintes situações: (a) uma curva plana dada pela equação  $y = y(x)$ ; (b) o mesmo, com a curva dada por  $x = x(y)$ ; (c) o mesmo, com a curva dada por  $r = r(\phi)$ ; (d) o mesmo, com a curva dada por  $\phi = \phi(r)$ ; (e) uma curva sobre a superfície de um cilindro de raio  $R$ , dada por  $\phi = \phi(z)$ ; (f) o mesmo, para uma curva dada por  $z = z(\phi)$ ; (g) uma curva sobre a superfície de uma esfera de raio  $R$ , dada por  $\theta = \theta(\phi)$ ; o mesmo, com a curva dada por  $\phi = \phi(\theta)$ .

3. De um modo geral, o integrando  $f(y, y', x)$  cuja integral queremos minimizar depende de  $y$ ,  $y'$  e  $x$ . Quando  $f$  é independente de uma destas variáveis, o problema pode se simplificar bastante. Nestes casos, podemos encontrar com facilidade uma constante de movimento, chamada neste contexto de uma **primeira integral** das equações de Euler-Lagrange. Esta primeira integral reduz o problema, que em geral é traduzido por uma equação diferencial de 2ª ordem, numa equação de 1ª ordem, mais fácil de resolver.

(a) Suponha que  $f = f(y', x)$  não dependa de  $y$ . Prove que, neste caso, a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$\partial f / \partial y' = \text{constante}$$

Na mecânica Lagrangeana, veremos que esta simplificação ocorre sempre que uma componente do momento se conserva.

(b) Suponha agora que  $f = f(y, y')$  não dependa da variável independente  $x$ . Prove que, neste caso,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Em seguida, use a equação de Euler-Lagrange para substituir  $\partial f / \partial y$  do lado direito e mostre portanto que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

Prove que este resultado nos dá imediatamente uma primeira integral dada por

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante}.$$

Este resultado pode simplificar muitos cálculos. Na mecânica Lagrangeana, onde a variável independente é o tempo  $t$ , o resultado correspondente a este é que, se a função Lagrangeana for independente de  $t$ , então a energia é conservada.

4. Considere um objeto de massa  $m$  que pode se mover em duas dimensões com uma energia potencial  $U(x, y) = \frac{1}{2}kr^2$ , onde  $r^2 = x^2 + y^2$ . Escreva a Lagrangeana, usando as coordenadas  $x$  e  $y$ , e obtenha as equações de movimento de Lagrange. Descreva suas soluções. (Esta é a energia potencial de um íon numa "armadilha de íons", que pode ser usada para estudar as propriedades de íons atômicos individuais.)

5. Considere uma partícula de massa  $m$  que se move sobre um plano sem atrito, inclinado de um ângulo  $\alpha$  com relação à horizontal. Escreva a Lagrangeana em termos das coordenadas cartesianas  $x$ , horizontal, e  $y$ , orientada para baixo ao longo do plano. O sistema é bidimensional - as coordenadas  $x$  e  $y$  da partícula são independentes. Não esqueça de incluir a energia potencial gravitacional. Encontre as duas equações de Lagrange e mostre que elas são as que você deveria esperar.

6. Considere duas partículas se movendo sem vínculos em 3 dimensões, com energia potencial  $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ .

(a) Escreva as seis equações de movimento obtidas pela aplicação da segunda lei de Newton a cada partícula.

(b) Escreva a Lagrangeana  $\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = T - U$  e mostre que as seis equações de Lagrange são idênticas as equações Newtonianas obtidas no item (a). Este resultado demonstra a validade das equações de Lagrange em coordenadas cartesianas, o que por sua vez demonstra o princípio de Hamilton. Como este último é independente do sistema de coordenadas, isto prova a validade das equações de Lagrange em qualquer sistema de coordenadas.

7. (a) Escreva a Lagrangeana  $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$  para duas partículas de massas iguais  $m_1 = m_2 = m$ , confinadas a se mover sobre o eixo  $x$  e ligadas por uma mola de energia potencial  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , onde  $x$  é a deformação da mola  $x = x_1 - x_2 - l$  e  $l$  é o comprimento da mola quando relaxada, e supomos que a massa 1 esteja sempre à direita da massa 2.

(b) Reescreva  $\mathcal{L}$  em termos das novas variáveis  $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  (a posição do centro de massa) e  $x$  (a deformação), e obtenha as duas equações de Lagrange para  $X$  e  $x$ .

(c) Resolva estas equações obtendo  $X(t)$  e  $x(t)$  e descreva o movimento.

8. Considere uma conta de vidro obrigada a se mover num aro circular rígido de raio  $R$  apoiado sobre um plano horizontal  $xy$  com seu centro na origem  $O$ . Use o ângulo  $\phi$  das coordenadas polares bidimensionais como uma coordenada generalizada para descrever a posição da conta. Escreva as equações que dão as coordenadas cartesianas  $(x, y)$  em função de  $\phi$  e a equação que nos dá  $\phi$  em função de  $x$  e  $y$ .

9. Considere um pêndulo simples suspenso do teto de um vagão de trem que oscila para frente e para trás, de modo que as coordenadas do ponto de suspensão do pêndulo sejam  $x_s = A\cos(\omega t)$  e  $y_s = 0$ . Use o ângulo  $\phi$  entre a vertical e o fio do pêndulo como coordenada generalizada e escreva as equações que dão as coordenadas cartesianas da massa do pêndulo em função de  $\phi$  e vice-versa.

10. Um bloco de massa  $m_1$  está apoiado sobre uma mesa horizontal e ligado a um barbante ideal (de massa desprezível). O barbante está estendido na horizontal até a borda da mesa, onde, depois

de passar sobre uma roldana ideal (de massa desprezível e sem atrito), fica estendido na vertical com um outro bloco de massa  $m_2$  ligado a sua extremidade. Use como coordenada generalizada a distância  $x$  entre a segunda massa e o tampo da mesa, obtenha sua equação de movimento de Lagrange e resolva-a para obter a aceleração dos blocos.